УДК 621.382.029.6 DOI 10.21685/2307-4205-2018-1-4

В. С. Михайлов

ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНОК НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО И БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДОВ

V. S. Mikhaylov

TESTING ESTIMATES ON THE BASIS OF INTEGRAL AND BAYESIAN APPROACHES

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью настоящей работы является построение правила выбора эффективной оценки, основанного на интегральном и байесовском подходах по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом типа *NB*τ, и нахождение эффективных оценок в соответствии с этим правилом. *Методы.* Для нахождения эффективной оценки использовались интегральные числовые характеристики точности оценки, а именно: суммарный квадрат смещения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от всех возможных значений оцениваемой характеристики по различным значениям параметра пуассоновского закона распределения, характеризующего поток отказов совокупности испытуемых изделий. *Результаты и выводы.* В соответствии с логикой построенного правила выбора эффективных оценок, основанной на интегральном и байесовском подходах, для испытаний, проводимых в соответствии с планом типа *NB*τ, и основанной на априори известном равномерном законе распределения, можно подытожить: 1) байесовская оценка $\hat{\theta}_Q$ проигрывает по своей эффективности в сравнении с предложенными оценками; 2) следует проявлять осторожность при использовании байесовского подхода к оценке результатов испытаний. Проверяя полученные результаты, необходимо дополнительно использовать эффективные интегральные оценки. В качестве таковой необходимо использовать оценку T_{01} и f. При сильном расхождении байесовской оценки и интегральной следует использовать результаты интегральной оценки; 3) если испытатель принимает решение – отказаться использовать байесовскую оценку и не учитывать априори известное равномерное распределение вероятностей, то в качестве оценки ВБР следует использовать традиционную несмещенную оценку, а в случае безотказных испытаний – оценку $f = e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$.

Ключевые слова: пуассоновский закон распределения; экспоненциальное распределение; план испытаний; точечная оценка; байесовская оценка.

Abstract. *Background*. The aim of this paper is to construct a rule for choosing an effective evaluation based on integral and Bayesian approaches based on the results of tests conducted in accordance with the *NB*τ-type plan and finding effective estimates in accordance with this rule. *Methods*. To find an effective estimate, we used the integral numerical characteristics of the accuracy of the estimate, namely, the total square of the displacement of the expected realization of a certain valuation variant from all possible values of the estimated characteristic from the different values of the parameter of the Poisson distribution law that characterizes the failure flow of the set of products under test. *Results and conclusions*. In accordance with the logic of the constructed rule for the choice of effective estimates based on the integral and Bayesian approaches, for tests conducted in accordance with a plan of type *NB*τ and based on a priori known uniform distribution law , it is possible to sum up: 1) the Bayesian estimate $\hat{\theta}_Q$ loses its effectiveness in comparison with the proposed estimates; 2) caution should be exercised when using the Bayesian approach to the evaluation of test results. When checking the results obtained, it is also necessary to use effective integral estimates. As such, it is necessary to use the T_01 and f ; 3) if the tester decides not to use the Bayesian estimate and not take into account a priori a known uniform probability distribution, then the traditional unbiased estimate should be used as the FBI estimate, and in the case of trouble-free tests, should be used the estimate $f = e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$.

Key words: Poisson distribution law; exponential distribution; test plan; point estimation; Bayesian estimation.

Введение

Будем рассматривать пуассоновский поток отказов [1], который возникает при проведении испытаний по плану типа *NB*τ, где *N* – число испытуемых однотипных изделий; τ – наработка (одинаковая для каждого изделия); *B* – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается [1]. При этом будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (далее – з.р.) с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой до отказа (далее – СНДО). Тогда расчетное значение вероятности безотказной работы (далее – ВБР) одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством

$$P_0(\tau) = e^{\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)}. \tag{1}$$

В дальнейшем на примере оценки СНДО будем вести рассуждения и строить примеры.

Для плана типа *NB*τ достаточной статистикой является число наблюденных отказов (*r*) [2, 3]. Обозначим случайное число отказов через *R*, тогда для плана испытаний типа *NB*τ случайная величина *R* (далее – с.в.), имеет пуассоновское распределение $L(r;\Delta)$ с параметром $\Delta = N\tau / T_0$ [2, 3]. Тогда, по определению, *r* – реализация с.в. *R*. С другой стороны, *R* – сумма с.в. X_i, каждая из которых есть случайное число отказов одного из *N* изделий (1 < *i* < *N*), поставленных на испытания. X_i имеют пуассоновское распределение с параметром Δ / N:

$$L(r;\Delta = tN\tau) = \sum_{k=0}^{X_1+\ldots+X_N=r} e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}. \tag{2}$$

Функция правдоподобия для плана *NB*τ (далее – $F_{\mathrm{w}}(r)$) как функция от достаточной статистики и параметра $W = N / T_0$ имеет вид [1]

$$f_w(r) = W^r e^{(-W\tau)}. \tag{3}$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется обозначение для $f_w(r)$, когда *R* имеет случайный характер, тогда $f_w(r) \equiv f(W \mid R = r)$ – условная плотность распределения.

Определим кратко наиболее встречающиеся критерии эффективности оценок [2] и их отличия. В основе этих критериев лежит среднеквадратический подход. Пусть T_0 не является с.в. и принадлежит множеству значений $T_0 \in G$. Для функции от параметра $\theta(T_0)$ оценка $\hat{\theta}_0(R)$ называется эффективной оценкой в классе оценок $\hat{\theta}_0 \in \Omega$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}(R)$ из этого класса выполняется неравенство

$$E(\hat{\theta}_0(R) - \theta(T_0))^2 \le E(\hat{\theta}(R) - \theta(T_0))^2,$$

где E – математическое ожидание соответствующее з.р. числа отказов для параметра $T_0 \in \mathrm{G}$.

Сравниваются две оценки, одна из которых после их сравнения признается эффективнее другой.

Минимаксный подход. Оценка называется минимаксной $\hat{\theta}_0(R)$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}(R)$ неслучайного параметра $t\epsilon G$ выполняется неравенство [2, 3]

$$\sup_{t\epsilon G} E_t(\hat{\theta}_0(R) - \theta(t))^2 \le \sup_{t\epsilon G} E_t(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2. \tag{4}$$

Из минимаксного подхода следует, что всегда найдется вариант, когда минимаксная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ является лучшей только в ближайшем диапазоне $t_0 \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ минимизации самого худшего случая уклонения от оцениваемого параметра $\theta(t)$, который может даже не принадлежать к рабочему диапазону $t \in [t_1, t_2]$. И в то же время уклонения минимаксной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ могут превышать уклонения других оценок $\hat{\theta}(R)$ уже в другом, но рабочем диапазоне значений оцениваемого параметра. Хотя уклонения этих оценок $\hat{\theta}(R)$ и превышают худший случай минимаксной оценки в ближайшем диапазоне $t_0 \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, который не находится в пределах рабочего диапазона

$t \in [t_1, t_2]$, но зато минимаксная оценка проигрывает (в смысле среднеквадратического уклонения) уже в рабочем диапазоне, и в этом смысле теряет свою эффективность.

Байесовский подход. Суть байесовского подхода состоит в том, что неизвестный (оцениваемый) параметр T_0 (или функция от параметра $\theta(T_0)$) рассматривается как случайная величина с некоторой плотностью распределения $q(t)$, где t – реализация с.в. T_0 [2, 3]. Плотность $q(t)$ называется априорной, т.е. данной до эксперимента. Байесовский подход предполагает, что неизвестный параметр T_0 был выбран случайным образом из распределения с плотностью $q(t)$.

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного распределения (после эксперимента) примет вид [2]

$$q(t / R) = \frac{f_\Delta(r) q(t)}{f(r)}, \tag{5}$$

где $f(r) = \int f_w(r) q(t) dt$. Само апостериорное распределение параметра $\theta(T_0)$ будем обозначать через Q_R. Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид

$$\hat{\theta}_Q(R) = E\left(\theta(T_0) \mid \mathrm{R}\right) = \int \theta(t) q(t \mid \mathrm{R}) dt = \int \theta(t) Q_R(dt). \tag{6}$$

В силу свойств условного математического ожидания байесовская оценка минимизирует среднеквадратическое уклонение $E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2$. Или для сравнения байесовской оценки на множестве других оценок $\hat{\theta}(R)$ выполняется неравенство

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 \le E(\hat{\theta}(R) - \theta(T_0))^2 = \int E_t(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2 q(t) dt. \tag{7}$$

Отметим еще раз, что для байесовской оценки безусловное среднеквадратическое уклонение (см. формулу (7))

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 = \int E_t(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(t))^2 q(t) dt \tag{8}$$

принимает наименьшее возможное значение. Соотношение (8) показывает, что байесовская оценка минимизирует среднее значение. Недостатком байесовского подхода является обязательное знание плотности априорного з.р. случайного параметра T_0 (см. формулы (5)–(8)). С одной стороны, эти заложенные в правило предварительные знания несут в себе однократные финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [3], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества.

Отметим полезные связи между минимаксными и байесовскими оценками. Если существует оценка $\hat{\theta}_1$ и распределение Q такие, что при всех μ выполняется неравенство $E(\hat{\theta}_1(R) - \theta(\mu))^2 \le \int E_u(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(u))^2 q(u) du$, то оценка $\hat{\theta}_1$ – минимаксная [2]. В действительности, всегда выполняется равенство и в этом случае байесовская оценка является минимаксной.

Интегральный подход. Интегральный подход отработан в основном для плана $NB\tau$ [4–6]. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(R)$, заданного на сумме значений относительных смещений оценки от функции над параметром з.р. $\theta(T_0)$, а именно: $b / \theta(t) = \dfrac{E\left(\theta(R)\right) - \theta(t)}{\theta(t)}$. В этом случае самым разумным является построение критерия выбора эффективной оценки на множестве оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau)$, основанном на суммарном квадрате относительных смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(R, N, \tau)$ от $\theta(T_0)$ для всех возможных значений T_0, N и τ. Поэтому в качестве критерия получения эффективной оценки строится функционал (далее – $A(\hat{\theta})$)

$$A\left(\hat{\theta}\right)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{\theta(T_0)}\right)^2\left\{E\hat{\theta}(R,N,\tau)-\theta(T_0)\right\}^2\partial\Delta, \tag{9}$$

где $\Delta = N\tau / T_0$ – параметр пуассоновского з.р., характеризующий поток отказов [1], $T_0=\dfrac{N\tau}{\Delta}$, $b^2=\left\{E\hat{\theta}(R,N,\tau)-\theta(T_0)\right\}^2$.

Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром Δ [1], найдем

$$E\hat{\theta}(R,N,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\theta}(k,N,\tau)e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}. \tag{10}$$

Эффективная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ должна обладать минимальной величиной функционала $A\left(\hat{\theta}_0\right)$. Такие эффективные оценки будем называть интегральными оценками. Из определения интегральной оценки следует, что ее выбор основан на минимизации суммы относительных смещений от оцениваемого параметра (или функции от параметра) на всем диапазоне значений, принимаемых этим параметром, и на всем диапазоне значений, которые могут принимать количество испытуемых изделий и время испытаний. Таким образом, интегральный подход учитывает все факторы, влияющие на выбор эффективной оценки. Интегральный подход наиболее интересен в случае, когда оценки $\hat{\theta}(R,N,\tau)$ принадлежат к классу смещенных оценок $b^2>0$.

Отличие байесовской оценки от интегральной выражено равенством

$$E(\hat{\theta}_Q(R)-\theta(T_0))^2=D\left(\hat{\theta}_Q(R)\right)+b=D\left(\hat{\theta}_Q(R)\right)+E(\hat{\theta}_Q(R))-\theta(T_0)$$

т.е. байесовская оценка минимизирует среднеквадратическое уклонение за счет минимальной дисперсии, однако, во многих случаях можно найти оценку у которой смещение от параметра (или функции от параметра) меньше. Для интегральной оценки важно не минимальное рассеивание оценок от параметра, а минимальное смещение, и в этом ее возможное преимущество в зависимости от решаемых задач. Таким образом байесовские и интегральные оценки решают разные задачи, в основе решения которых лежит одна и та же числовая характеристика точности оценки – среднеквадратическое отклонение.

Определение цели работы

Целью настоящей работы является построение правила выбора эффективной оценки, основанного на интегральном и байесовском подходах по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом типа $NB\tau$, и нахождение эффективных оценок в соответствии с этим правилом.

Построение оценок, основанное на интегральном и байесовском подходах

Пусть с.в. T_0 принимает значения из диапазона $t\in[t_1;t_2]$. Тогда введем обозначения

$$\Delta=\frac{N\tau}{t}=w\tau,\ v=N\tau,\ t=\frac{v}{\Delta}, N=1, \tag{11}$$

где v – характеристика объема испытаний, а $N=1$ – не нарушает общности рассуждений.

Следуя логике построения правила выбора эффективных оценок, основанного на интегральном и байесовском подходах (см. формулы (5)–(10)), в качестве нового критерия эффективности оценок может служить функционал общего вида

$$B\left(\hat{\theta}(R,v)\right)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{\theta(t)}\right)^2\left\{E\hat{\theta}(R,v)-\theta(t)\right\}^2 q(t)\partial t. \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что в общем случае для множества значений переменной $v\in[v_1;v_2]$ минимизация функционала $B\left(\hat{\theta}(R,v_i)\right)$, где $v_i\in[v_1;v_2]$, даст множество частных эффективных оценок $\hat{\theta}(R,v_i)$. Чтобы найти общую эффективную оценку, необходимо ее поиск осуществлять минимизацией функционала следующего вида:

$$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}B\left(\hat{\theta}(R,v_i)\right), \tag{13}$$

где δ – шаг суммирования, $I=\dfrac{v_2-v_1}{\delta}$ – число шагов суммирования. Так как величина функционала $B\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$ с изменением границ интервала v_1 и v_2 может стремиться как к нулю, так и к бесконечности, то следует ограничиваться рабочим диапазоном объема испытаний. Реальный объем испытаний может колебаться в пределах от 500 до 1000 000 часов в зависимости от сложности и надежности испытуемого объекта. Именно этот фиксированный интервал следует рассматривать в качестве эталона при вычислении (минимизации) функционала $S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$.

Для параметрических оценок формулу (13) можно представить в виде

$$S\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}B\left(\hat{\theta}(R,v_i,g_j)\right), \tag{13′}$$

где δ – шаг суммирования, $J=\dfrac{g_2-g_1}{\delta}$ – число шагов суммирования, $[g_1;g_2]$ – некоторый отрезок суммирования $g\epsilon[g_1;g_2]$ на числовой оси, который выбирается исходя из задач надежности.

Определение эффективности оценок для плана испытаний типа *NB*τ

Учитывая, что с.в. R распределена в соответствии с пуассоновским з.р., формула (13) перепишется с учетом формул (11) в виде

$$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{J}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\theta}(k,v_i)e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}-\theta\left(\frac{v_i}{\Delta}\right)\right\}^2 q(v_i/\Delta)\left(\frac{1}{\theta(\frac{v_i}{\Delta})}\right)^2\frac{v_i}{\Delta^2}\partial\Delta. \tag{14}$$

Построим байесовскую оценку для плана испытаний типа *NB*τ. Из формулы (3) для плана испытаний типа *NB*τ следует

$$f(r)=\int w^R e^{-\Delta}q(t)\partial t. \tag{15}$$

Из формул (5) , (6) и (15) для плана испытаний типа *NB*τ следует

$$\hat{\theta}_Q(R)=\int\theta(t)q(t\,|\,R)dt=\int\theta(t)\frac{f_w(r)q(t)}{f(r)}dt=\int\theta(t)\frac{w^r e^{-\Delta}q(t)}{\int w^r e^{-\Delta}q(t)\partial t}dt. \tag{16}$$

Формула (16) является общей формулой для построения байесовской оценки по результатам испытаний по плану типа *NB*τ, когда известна плотность априорного распределения $q(\mathrm{t})$.

Случай априорного равномерного з.р. параметра T_0

Плотность равномерного з.р. параметра T_0 на отрезке $t\in[t_1,t_2]$ имеет вид

$$q(t)=\frac{1}{t_2-t_1}. \tag{17}$$

Требуется определить СНДО (T_0) по результатам испытаний – план типа *NB*τ. Подставляя в выражение $f(r)=\int f_w(r)q(t)dt$ (см. знаменатель формулы (16)) плотность априорного распределения $q(t)$ из формулы (17), получаем

$$f(r)=\int w^r e^{-\Delta}\,q(t)\partial t=\int_{t_1}^{t_2} w^r e^{-\Delta}\,\frac{1}{t_2-t_1}\partial t.$$

Учтем обозначения из формулы (11)

$$f(r)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}(N/t)^r(e^{-\tau N/t})\partial t. \qquad (18)$$

Тогда формула (16) с учетом формулы (18) примет вид

$$\hat{\theta}_Q(R=r,v)=\frac{1}{\int_{t_1}^{t_2}(N/t)^r(e^{-v/t})\partial t}\int_{t_1}^{t_2}\theta(t)(N/t)^r e^{(-v/t)}\partial t, \qquad (19)$$

где $\theta(t)=t$.

Формула (14) перепишется в виде

$$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)=\frac{1}{t_2-t_1}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{v_i}\int_{v_2/t_2}^{v_1/t_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\theta}(k,v_i)e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}-v_i/\Delta\right\}^2\partial\Delta. \qquad (20)$$

Где $v_i\in[v_1,v_2]$, а отрезок $[v_1,v_2]$ выбирается исходя из жизненных реалий.

Для класса смещенных оценок, представимых в виде $\hat{\theta}(R,v)=v\varphi(R)$, функционал $S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$ принимает вид

$$S\left(v\varphi(R)\right)=\frac{v_{cp}}{t_2-t_1}\int_{v_2/t_2}^{v_1/t_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(R)e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}-\frac{1}{\Delta}\right\}^2\partial\Delta;$$

$$v_{\text{ср}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}v_i.$$

Вырожденный случай, когда $t\in[0;\infty]$, не представляет интереса.

Будем предполагать, что объем испытаний варьируется в пределах 1E + 03 до 1E + 07, а СНДО – в пределах 1E + 04 до 1E + 07, что соответствует проведению испытаний сложного изделия.

В табл. 1 приведены результаты подстановки в функционал $S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$ в соответствии с формулой (20) следующих оценок СНДО:

– байесовская оценка $\hat{\theta}_Q(R=r,v)$, рассчитанная в соответствии с формулой (19);

– интегральная эффективная оценка на классе смещенных оценок $\hat{\theta}(R,v)$, представимых в виде $\hat{\theta}(R,v)=v\varphi(R)$, а именно:

$$T_{01}=2NT,\ \text{при}\ r=0\ \text{и}\ T_{01}=\frac{NT}{r+1},\ \text{при}\ r>0;$$

– и оценок вида:

$$T_{02}=2NT,\ \text{при}\ r=0\ \text{и}\ T_{02}=\frac{NT}{r},\ \text{при}\ r>0;$$

$$T_{03}=\frac{NT}{r+1};$$

$$T_{04}=6NT,\ \text{при}\ r=0\ \text{и}\ T_{04}=\frac{NT}{r+0{,}5},\ \text{при}\ r>0.$$

Таблица 1

Результаты подстановки оценок в функционал $S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$

в соответствии с формулой (20), когда $T_0 \in [t_1, t_2]$ равномерно распределена на отрезке

$B\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$	$\hat{\theta}_Q$	T_{01}	T_{02}	T_{03}	T_{04}
$[t_1 = 1E+04; t_2 = 1E+05]$					
$v = 1E+3$	1,170	0,903	0,902	0,950	0,735
$v = 1E+4$	0,886	0,410	0,390	0,634	0,295
$v = 1E+5$	0,169	0,008	0,182	0,041	1,639
$v = 1E+6$	0,010	9E-09	0,005	1E-10	0,001
$v = 1E+7$	0	0	0	0	0
$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$	0,447	0,264	0,296	0,325	0,534
$[t_1 = 1E+05; t_2 = 1E+06]$					
$v = 1E+3$	1,178	0,917	0,917	0,922	0,897
$v = 1E+4$	1,170	0,903	0,902	0,950	0,735
$v = 1E+5$	0,886	0,410	0,390	0,633	0,295
$v = 1E+6$	0,169	0,008	0,182	0,041	1,639
$v = 1E+7$	0,013	9E-09	0,005	1E-10	0,001
$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$	0,683	0,448	0,479	0,509	0,713
$[t_1 = 1E+06; t_2 = 1E+07]$					
$v = 1E+3$	1,632	0,307	0,307	0,308	0,306
$v = 1E+4$	1,178	0,917	0,917	0,922	0,897
$v = 1E+5$	1,170	0,903	0,902	0,950	0,735
$v = 1E+6$	0,886	0,410	0,390	0,633	0,295
$v = 1E+7$	0,169	0,008	0,182	0,041	1,639
$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$	1,007	0,509	0,540	0,571	0,774
$[t_1 = 1E+04; t_2 = 1E+07]$					
$v = 1E+3$	228	0,360	0,360	0,361	0,356
$v = 1E+4$	132	0,911	0,911	0,922	0,877
$v = 1E+5$	17	0,850	0,849	0,913	0,703
$v = 1E+6$	1,80	0,370	0,368	0,574	0,413
$v = 1E+7$	0,147	0,007	0,164	0,037	1,477
$S\left(\hat{\theta}(R,v)\right)$	76	0,500	0,530	0,561	0,765

Из табл. 1 следует, что байесовская оценка $\hat{\theta}_Q$ проигрывает по своей эффективности в сравнении с предложенными оценками. Такое решение вполне ожидаемо, так как в силу свойств условного математического ожидания байесовская оценка минимизирует среднеквадратическое уклонение $E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2$ (сумму дисперсии и смещения), но не смещение, как отдельную характеристику. Как показано в табл. 2, слабая зависимость байесовской оценки от объема испытаний делает ее эффективность, основанную на интегральном критерии (формула (20)), низкой в сравнении с предложенными оценками (см. табл. 1), которые от объема испытаний зависят линейно $\hat{\theta}\left(R,v\right) = v\varphi(R)$, что и делает их конкурентно способными при сравнении по правилам построенного интегрального критерия. Очевидно, предложенные интегральные оценки обладают меньшим суммируемым относительным смещением на отрезке $T_0 \in [t_1, t_2]$, чем байесовская.

Для равномерного з.р. с расширением отрезка $[t_1, t_2]$ происходит ухудшение свойств байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ (деградация). «Наихудшим» распределением является равномерное распределение на всей прямой. В этом случае байесовская оценка $\hat{\theta}_Q^{\infty}$ (оценка Питмена [2]) приобретает свои самые худшие свойства

$$\hat{\theta}_Q^{\infty}\left(R=r,v\right)=\frac{\int_0^{\infty}\theta\left(t\right)\left(N/t\right)^r e^{(-v/t)}\partial t}{\int_0^{\infty}\left(N/t\right)^r\left(e^{-v/t}\right)\partial t}=\frac{\dfrac{N^2\left(r-3\right)!}{\tau^{(r-2)}}}{\dfrac{N\left(r-2\right)!}{\tau^{(r-1)}}}=\frac{N\tau}{(r-2)}. \tag{21}$$

При выводе формулы (21) использован стандартный интеграл [7]

$$\int_0^{\infty}(x)^k e^{-nx}\partial x=\frac{k!}{n^{k+1}}.$$

В табл. 2 приведены результаты предложенных оценок СНДО (см. табл. 1) для различных объемов безотказных испытаний и испытаний с одним отказом, когда $T_0\in[t_1,t_2]$ равномерно распределена на отрезке $[t_1,t_2]$.

Таблица 2

Результаты предложенных оценок СНДО для различных объемов безотказных испытаний и испытаний с одним отказом, когда $T_0\in[t_1,t_2]$ равномерно распределена на отрезке $[t_1,t_2]$

Объем испытаний	$\hat{\theta}_Q$	T_{01}	T_{02}	T_{03}	T_{04}
1	2	3	4	5	6
$[t_1=1E+04;t_2=1E+05]$					
$v=1E+3,r=0$	55402	2000	2000	1000	6000
$v=1E+4,r=0$	58667	20000	20000	10000	60000
$v=1E+5,r=0$	73867	200000	200000	100000	600000
$v=1E+6,r=0$	92644	2000000	2000000	1000000	6000000
$v=1E+7,r=0$	99000	20000000	20000000	10000000	60000000
$v=1E+3,r=1$	39617	500	1000	500	667
$v=1E+4,r=1$	44134	5000	10000	5000	6667
$v=1E+5,r=1$	67688	50000	100000	50000	66667
$v=1E+6,r=1$	92133	500000	1000000	500000	666667
$v=1E+7,r=1$	98000	5000000	10000000	5000000	6666667
$[t_1=1E+05;t_2=1E+06]$					
$v=1E+3,r=0$	550406	2000	2000	1000	6000
$v=1E+4,r=0$	554026	20000	20000	10000	60000
$v=1E+5,r=0$	586674	200000	200000	100000	600000
$v=1E+6,r=0$	738679	2000000	2000000	1000000	6000000
$v=1E+7,r=0$	926442	20000000	20000000	10000000	60000000
$v=1E+3,r=1$	391448	500	1000	500	667
$v=1E+4,r=1$	396173	5000	10000	5000	6667
$v=1E+5,r=1$	441340	50000	100000	50000	66667
$v=1E+6,r=1$	676880	500000	1000000	500000	666667
$v=1E+7,r=1$	921339	5000000	10000000	5000000	6666667
$[t_1=1E+06;t_2=1E+07]$					
$v=1E+3,r=0$	5500406	2000	2000	1000	6000
$v=1E+4,r=0$	5504065	20000	20000	10000	60000
$v=1E+5,r=0$	5540267	200000	200000	100000	600000
$v=1E+6,r=0$	5866740	2000000	2000000	1000000	6000000
$v=1E+7,r=0$	7386798	20000000	20000000	10000000	60000000

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6
$v=1E+3, r=1$	3909743	500	1000	500	667
$v=1E+4, r=1$	3914485	5000	10000	5000	6667
$v=1E+5, r=1$	3961734	50000	100000	50000	66667
$v=1E+6, r=1$	4413400	500000	1000000	500000	666667
$v=1E+7, r=1$	6768800	5000000	10000000	5000000	6666667
$[t_1=1E+04; t_2=1E+07]$					
$v=1E+3, r=0$	5007071	2000	2000	1000	6000
$v=1E+4, r=0$	5025074	20000	20000	10000	60000
$v=1E+5, r=0$	5161725	200000	200000	100000	600000
$v=1E+6, r=0$	5761407	2000000	2000000	1000000	6000000
$v=1E+7, r=0$	5386758	20000000	20000000	10000000	60000000
$v=1E+3, r=1$	1633917	500	1000	500	667
$v=1E+4, r=1$	1709986	5000	10000	5000	6667
$v=1E+5, r=1$	2319841	50000	100000	50000	66667
$v=1E+6, r=1$	3963648	500000	1000000	500000	666667
$v=1E+7, r=1$	6768680	5000000	10000000	5000000	6666667

Из табл. 2 следует, что байесовская оценка обладает слабой зависимостью от объема испытаний в сравнении с предложенными оценками. Такая слабая зависимость байесовских оценок от объема испытаний может спровоцировать к выбору плана испытаний с минимальным объемом (например $v=1E+3$), что при получении одного отказа в процессе испытаний скорее всего будет свидетельствовать о несоответствии априорного з.р. истине, чем о соответствии изделий требованиям к надежности. Результаты оценок $T_{01}-T_{04}$ (см. табл. 2), независимых от априорного з.р., говорят в пользу этого факта. С одной стороны, байесовские оценки позволяют минимизировать объем испытаний [3], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества, а с другой стороны, слабая зависимость от объема испытаний и сильная зависимость байесовского критерия от априорного распределения, выбор которого зависит от многих факторов, играют в пользу оценок независимых от априорного з.р с адекватной зависимостью от объема испытаний. Формула линейной зависимости $\hat{\theta}(R,v)=v\varphi(R)$, заложенная в оценки $T_{01}-T_{04}$, линейно (адекватно) корректирует результат в зависимости от объема испытаний, что дает им неоспоримые преимущества, когда вид априорного з.р. приобретает большие изменения, произошедшие из-за нарушений в процессе стабильного производства (появились отказы) или когда объем испытаний не соответствует величине оцениваемого параметра. С этой точки зрения, оценки, независящие от априорного з.р. и адекватно реагирующие на изменения объема испытаний, имеют приоритет в сравнении с байесовскими оценками, хотя и имеют большой разброс результатов (имеют большую дисперсию). Обладая минимальным разбросом результатов (минимальной дисперсией), байесовская оценка является сильно смещенной, что нивелирует ее преимущества. В процессе производства испытатель должен самостоятельно делать выбор: либо минимальный разброс с большим смещением, либо минимальное смещение с большим разбросом. В зависимости от выбора принимается решение использовать байесовскую оценку или интегральную.

Параметрический случай

Для параметрического случая $\theta(t)=e^{(-\frac{g}{t})}$, объединяя формулы (13′) и (14), получаем

$$S\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)=\frac{1}{t_2-t_1}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\int\limits_{v_2/t_2}^{v_1/t_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\theta}(k,v_i,g_i)e^{-\Delta}}{e^{(-\frac{g_i\Delta}{v_i})}}\frac{\Delta^k}{k!}-1\right\}^2\frac{v_i}{\Delta^2}\partial\Delta. \quad (22)$$

В табл. 3 приведены результаты подстановки в функционал $S\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)$ в соответствии с формулой (22) следующих оценок ВБР для $g \in [1E+3; 1E+5]$ час:

– $\hat{\theta}_Q(R,v,g)$ – оценка, рассчитанная в соответствии с формулой (19), для случая $\theta(t) = e^{-g/t}$;

– $\hat{\theta}(R,v,g) = e^{(-\frac{g}{T_{01}})}$;

– $\hat{\theta}(R,v,g) = e^{(-\frac{g}{T_{02}})}$;

– $\hat{\theta}(R,v,g) = e^{(-g/T_{03})}$;

– $\hat{\theta}(R,v,g) = e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$.

Таблица 3

Результаты подстановки оценок ВБР, для $g \in [1E+3;1E+5]$ час, в функционал $S\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)$ в соответствии с формулой (22) (T_0 – в пределах равномерного распределения от 1E + 04 до 1E + 07)

Функционал	$\hat{\theta}_Q(R,v,g)$	$e^{(-\frac{g}{T_{01}})}$	$e^{(-\frac{g}{T_{02}})}$	$e^{(-\frac{g}{T_{03}})}$	$e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$
$S\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)$	1,344	0,158	0,158	0,209	0,099

Из табл. 3 следует, что оценка $e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$ выигрывает по своей эффективности в сравнении с предложенными оценками, в том числе и с байесовской оценкой, что подтверждает сделанные выше выводы.

При вычислениях шаг суммирования по объему испытаний и величине g производился по степеням с шагом равным единице, а именно: 1E + 03, 1E + 04, 1E + 05, 1E + 06, 1E + 07.

Заметим, что при вычислениях варьирование шага суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Если испытатель принимает решение – отказаться использовать байесовскую оценку и не учитывать априори известное равномерное распределение вероятностей, то в качестве оценки ВБР следует использовать традиционную несмещенную оценку [1]

$$P(g) = \left(1 - \frac{g}{N\tau}\right)^r, \text{ при } \frac{g}{N\tau} < 1;\ P(g) = 0, \text{ при } \frac{g}{N\tau} \ge 1, \tag{23}$$

а в случае безотказных испытаний – оценку $f = e^{\left(-\frac{g}{T_{04}}\right)}$.

Оценка $f = e^{\left(-\frac{g}{T_{04}}\right)}$ выигрывает по своей эффективности в сравнении с предложенными оценками в том случае, когда априори не известен з.р. в соответствии с критерием [6], для которого после подстановки оценки f в измененный функционал $A(f)$ [6]

$$A\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\int_0^{60}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\theta}(k,v_i,g_i)e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!} - e^{(-\frac{g_i\Delta}{v_i})}\right\}^2 \partial\Delta, \tag{24}$$

получаем, что $A(f) = 0{,}02$.

Результаты подстановки оценок ВБР, для $g \in [1E+3; 1E+5]$ час, в функционал $A\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)$ в соответствии с формулой (24) приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты подстановки оценок ВБР, для $g \in [1E+3;1E+5]$ час, в функционал $A\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)$ в соответствии с формулой (24)

Функционал	$e^{(-\frac{g}{T_{01}})}$	$e^{(-\frac{g}{T_{02}})}$	$e^{(-\frac{g}{T_{03}})}$	$e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$
$A\left(\hat{\theta}(R,v,g)\right)$	0,038	0,036	0,072	0,020

Из табл. 4 следует, что оценка $f = e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$ является более эффективной в сравнении с предложенными, так как минимизирует функционал $A(f)$ (формула (24)).

Выводы

В соответствии с логикой построенного правила выбора эффективных оценок, основанной на интегральном и байесовском подходах (см. формулы (13) – (13′)), для испытаний, проводимых в соответствии с планом типа $NB\tau$, и основанной на априори известном равномерном з.р., можно подытожить:

1. Байесовская оценка $\hat{\theta}_Q$ (как и минимаксная) проигрывает по своей эффективности в сравнении с предложенными оценками (см. табл. 1 и 3).

2. Следует проявлять осторожность при использовании байесовского подхода к оценке результатов испытаний. Проверяя полученные результаты, необходимо дополнительно использовать эффективные интегральные оценки (см. табл. 1 и 3). В качестве таковых необходимо использовать оценки T_{01} и f. При сильном расхождении байесовской оценки и интегральной следует использовать результаты интегральной оценки.

3. Если испытатель принимает решение отказаться использовать байесовскую оценку и не учитывать априори известное равномерное распределение вероятностей, то в качестве оценки ВБР следует использовать традиционную несмещенную оценку (формула (23)), а в случае безотказных испытаний – оценку $f = e^{(-\frac{g}{T_{04}})}$.

Библиографический список

1. *Гнеденко, Б. В.* Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
2. *Боровков, А. А.* Математическая статистика / А. А. Боровков. – Новосибирск : Наука ; Изд-во Института математики, 1997. – 772 с.
3. *Савчук, В. П.* Байесовские методы статистического оценивания: надежность технических объектов / В. П. Савчук. – М. : Наука, 1989. – 328 с.
4. *Михайлов, В. С.* Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность и контроль качества. – 1988. – № 9. – С. 6–11.
5. *Михайлов, В. С.* Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность. – 2016. – № 4. – С. 40–42.
6. *Михайлов, В. С.* Оценка вероятности безотказной работы по результатам испытаний, не давших отказы / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 2 (18). – С. 62–66. DOI: 10.21685/2307-4205-2017-2-8.
7. *Лебедев, Н. Н.* Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – М. : ФМ, 1963. – 358 с.

Михайлов Виктор Сергеевич
ведущий инженер,
Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д. И. Менделеева
(115487, Россия, г. Москва, ул. Нагатинская, д. 16а)
E-mail: Mvs1956@list.ru

Mikhailov Viktor Sergeevich
lead engineer,
Central Research Institute of Chemistry and Mechanics named after D. I. Mendeleev
(115487, 16a Nagatinskaya street, Moscow, Russia)

УДК 621.382.029.6
Михайлов, В. С.
Исследование оценок на основе интегрального и байесовского подходов / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1 (21). – С. 28–39. DOI 10.21685/2307-4205-2018-1-4.